791. Closed linear Operator ヲ Unitär ト Hermitian トノ積ニテ表ハス証明

中野 秀五郎

J. v Neumann ガ Über adjungierte

Funktionaloperatoren, (Ann. of Math. 33) ニテ closed linear operator ヲ hyper maximal Hermitian ト längentreu ナ operator トノ積ニテ表ハスコトヲ証明シタ。所ガ最近小平氏ガ Murray and J. v. Neumann: On Rings of Operators (Ann. of Math. 37) ノ Lemma 9.1.4 ノ $Q(f,g)$ ヲ $Q(f,g)=(Af,Ag)+(f,g)$ ト置クコトニヨリ直チニ此ノ Lemma ヨリ上ノ Neumann ノ定理ガ得ラレルコトヲ証明シタ。(近日中発表ノ由) 此処デハ上ノ $Q(f,g)$ ヨリ Lemma ヲ用ヒズ証明シタ。

A ヲ Definitionsbereich $\mathfrak{D}$ ニテ定義セラレタ closed linear Operator. 然カモ $\mathfrak{D}$ ハ $\mathfrak{H}$ ニテ überall dicht 又 A ノ range モ $\mathfrak{H}$ ニテ überall dicht トスル。然ルトキハ $\mathfrak{D}$ ニ含マレル $f_1, f_2, \cdots\cdots$ ニシテ $\mathfrak{H}$ ノ completely normalized orthogonal system ガ存在スル。今

$$Q(f,g)=(Af,Ag)+(f,g) \qquad f,g\in\mathfrak{D}$$

ヲ考フレバ $Q(f,g)$ ハ一ツノ inner product ト考ヘラレ 此ノ inner product ニ関シテハ $f_1, f_2, \cdots\cdots$ ハ最早 orthogonal デハナイ。故ニ Schmidt ノ方法ニテ $Q(f,g)$ ニ関シ normalized orthogonal system $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ ヲ $f_1, f_2, \cdots\cdots$ ヨリ作ル。例ヘバ

$$\varphi_1 = a_{11} f_1 \qquad a_{11}\neq 0$$

$$\varphi_2 = a_{21} f_1 + a_{22} f_2 \qquad a_{22} \neq 0$$

(必ズシモ此ノ如キ方法ヲ必要トセズ單ニ $\varphi_i \in \mathfrak{D}$ ナレバ可故ニ一般ユークリッドニテモ可)．ナル形ニテ得ラル（f_1 f_2, ……ガ Q ニ関シテ linearly independent ナルコトハ $Q(f, f) = \|Af\|^2 + \|f\|^2$ ヨリ明ナリ）．

今

$$x_1 \varphi_1 + \cdots\cdots + x_n \varphi_n = R(x_1 f_1 + \cdots\cdots + x_n f_n)$$

ナル linear operator R ヲ考フレバ

$$f = x_1 f_1 + \cdots\cdots + x_n f_n$$

$$g = y_1 f_1 + \cdots\cdots + y_n f_n$$

ニ對シ

$$\begin{aligned} Q(Rf, Rg) &= Q(x_1 \varphi_1 + \cdots\cdots + x_n \varphi_n,\ y_1 \varphi_1 \\ &\qquad + \cdots\cdots + y_n \varphi_n) \\ &= x_1 \overline{y_1} + \cdots\cdots + x_n \overline{y}_n \\ &= (f, g) \end{aligned}$$

故ニ

$$(ARf, ARg) + (Rf, Rg) = (f, g)$$

又 $\quad \|ARf\|^2 + \|Rf\|^2 = \|f\|^2$

故ニ $\quad \|Rf\| < \|f\|$

ニシテ Rf ハ bounded. 従ッテ R ノ Definitionsbereich ヲ $\mathfrak{H}$ ニ拡張スルコトガ出来ル。然カモ g_1, g_2, ……ガ収斂スル elements トスレバ（ARg_n ガ sinnvoll ニテ）

$$\|A(Rg_n - Rg_m)\|^2 + \|Rg_n - Rg_m\|^2 = \|g_n - g_m\|^2$$

ヨリ g_n, Rg_n, ARg_n ノ一ツガ收斂スレバ他モ收斂ス．Aガ closed ナリトノ假定ヨリ、Rf ノ rang ト $\mathfrak{D}$ トガ一致スルコトガ知ラル。又 Rf ガ bounded ナルヲ以テ R^*f モ bounded デ Definitionsbereich ハ $\mathfrak{H}$ 故ニ R^*R ハ bounded positive definit. 故ニ Hypermaximal ナレバ、其レノ Eigenwertdarstellung ヨリ

$$R^*R = H_1^2$$

ナル bounded positive definite Hermitian ガ存在ガ知ラレル。然カモ $Rf = 0$ ナレバ $f = 0$ ナルヲ以テ、R. H. ハ inverse ガ存在シテ

$$U = RH_1^{-1}$$

ト置ケバ

$$U^* = H_1^{-1}R^*$$

$$\therefore\ U^*U = H_1^{-1}R^*RH_1^{-1} = H_1^{-1}H_1H_1H_1^{-1} = 1$$

然カモ H_1 ノ rang ハ $\mathfrak{H}$ ニテ überall dicht，故ニ H_1^{-1} ノ Definitionsbereich ハ $\mathfrak{H}$ ニテ überall dicht.
故ニ U ハ Unitär ナリ，従テ

$$R^{-1} = H_1^{-1}U^*$$

又

$$(ARf, ARg) + (Rf, Rg) = (f, g)$$

ヨリ

$$(Af, Ag) + (f, g) = (R^{-1}f,\ R^{-1}g)$$
$$= (H_1^{-1}U^*f,\ H_1^{-1}U^*g)$$
$$= (UH_1^{-2}U^*f,\ f)$$

$UH^{-2}U^*$ ハ Hermitian ナルヲ以テ

$$(Af, Ag) = (R_1 f, g)$$

ナル $\mathfrak{D}$ ニテ定義セラレタル Hermitian ガ存在ス。
然カモ

$$\|Af\|^2 = (R_1 f, f)$$

ヨリ R_1 ハ positive definit ニシテ．$R_1 f = 0$ ハ $f = 0$ ノ他ナシ。故ニ R_1 ハ hypermaximal ニシテ、其ノ Eigenwertdarstellung ヨリ

$$R_1 = H^2$$

ナル positive definite Hermitian H ガ存在ス。故ニ

$$(Af, Ag) = (Hf, Hg)$$

今 $\quad \varphi = Af \qquad \psi = Hf$

ト置ケバ

$$\|\varphi\| = \|\psi\|$$

トナリ、$\varphi = U\psi$ ナル linear operator U ハ längentreu. 然カモ A 及ビ H ノ rang ハ $\mathfrak{H}$ ニテ überall dicht ナルヲ以テ、U ハ Unitär. 故ニ

$$A = UH$$

ヲ得タリ。又コレハ一通リナリ。若シ他ノ Unitär U_1 positive definite Hermitian H_1 ニ對シ

$$\mathfrak{U} H = \mathfrak{U}_1 H_1 \qquad \mathfrak{U}_1 \mathfrak{U} H = H_1 \qquad \mathfrak{U}_1 \mathfrak{U} = H_1 H^{-1}$$

$\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}$ ハ Unitär ナレバ $H_1 H^{-1} \cdot H^{-1} H_1 = L$. $\therefore H_1^2 = H^2$.

H, H_1 ハ positive definite ナルヲ以テ $H_1 = H$.

$$\therefore \quad \mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1$$

如何トナレバ

$$(H^2 f, g) = \int \lambda \, d(E(\lambda) f, g)$$

$$(Hf, g) = \int \lambda \, d(F(\lambda) f, g)$$

ヨリ

$$(H^2 f, g) = \int \lambda^2 d(F(\lambda) f, g) = \int \lambda \, d(F(\sqrt{\lambda}) f, g)$$

$$\therefore \quad F(\sqrt{\lambda}) = E(\lambda)$$

$$\therefore \quad (Hf, g) = \int \lambda \, d(E(\lambda^2) f, g)$$

$$= \int \sqrt{\lambda} \, d(E(\lambda) f, g)$$

ナレバナリ。